

## Пороупругая модель колебаний твердых биологических тканей при гармоническом воздействии

Маслов Л.Б., канд. техн. наук

Предложена анизотропная модель биологической ткани как эффективной сплошной среды, описываемой уравнениями теории пороупругости Био. Разработана конечно-элементная пороупругая модель большеберцовой кости голени человека, проведен расчет амплитудно-частотных характеристик и распределения давления в порах компактной и губчатой костных тканей в случае вынужденных гармонических колебаний большеберцовой кости.

*Ключевые слова:* анизотропная модель, теория пороупругости, давление, гармоническое колебание, модель.

### Porouprugaya model of oscillations of solid biological tissues at harmonic effect

Maslov L.B., Candidate of Engineering Science

The anisotropic model of a biological tissue as effective continuum circumscribed by equations of the theory porouprugosti Bio is offered. Is developed certainly - element porouprugosti model of a tibial bone of an anticnemion of the person and the calculation of amplitude-frequency characteristics and pressure profile in pores of compact and spongy osteal tissues is conducted in case of enforced simple harmonic motions of a tibial bone.

*Keywords:* anisotropic model, theory porouprugosti, pressure, harmonic motion, model.

Мягкие и твердые ткани, образующие структурные элементы опорно-двигательного аппарата животных и человека, такие как скелетные мышцы, сухожилия и кости, представляют собой насыщенные физиологической жидкостью пористые деформируемые тела. Классическая теория упругости имеет ограниченные возможности в описании динамического поведения биологических структур, в котором существенную роль играют диссипативные процессы, обусловленные наличием вязкой жидкости в порах и на молекулярном уровне. Наиболее распространенная модель упругих тел как континуума точек, имеющих три степени свободы, хорошо подходит для описания конструкционных материалов, не имеющих внутренней структуры. Однако уже в случае композиционных материалов возникает необходимость использования более сложных моделей сплошной среды и аппарата эффективных упругих характеристик. В случае же живых тканей корректное математическое описание внутренней структуры тем более необходимо, поскольку распределение давления в порах и обусловленные давлением потоки внутритканевой жидкости играют существенную роль в клеточном метаболизме. Считается, что динамические потоки играют важную роль не только в питании клеток, но и в работе механочувствительной системы кости. В частности, можно отметить такие механобиологические процессы, как динамическое поддержание необходимого содержания кальция в костной ткани и обратный эффект остеопороза в результате отсутствия двигательной активности должного уровня, ускорение процесса кальцификации костной мозоли в зоне перелома или заживления поврежден-

ных мягких тканей при наличии дополнительного динамического воздействия, повышение мышечной силы спортсменов в результате электровибрационной стимуляции. Очевидно, что усредненное описание биологических тканей как классической сплошной среды с тремя степенями свободы в каждой материальной точке является в данном случае слишком грубым приближением и не может предоставить достаточного теоретического обоснования биомеханического эффекта, достигаемого за счет применения динамического стимулирования живых тканей.

Теория гетерогенных сред предоставляет более широкие возможности для математического описания как взаимодействия твердых и жидких фаз в природных и конструкционных материалах, так и физиологических процессов, происходящих в живых тканях. Значительное распространение получила теория эффективной пороупругости, разработанная в работах Мауриса Био [1, 2], использующая континуальный подход механики сплошных сред [3, 4]. Согласно теории пороупругости Био, предполагается, что в пористом материале могут быть выделены твердая фаза, представляющая собой упругий формообразующий скелет и воспринимающая основную силовую нагрузку, и жидкая фаза, полностью или частично заполняющая поры. Определяющие соотношения двухфазного материала, сформулированные Био на основе феноменологического подхода механики сплошных сред, в случае анизотропии упругих и гидравлических свойств могут быть записаны следующим образом:

$$\sigma^{(1)}(u, U) = C \cdot \varepsilon(u) + Qe(U); \quad (1)$$

$$\sigma^{(2)}(u, U) \cdot E = Q \cdot \varepsilon(u) + Re(U), \quad (2)$$

где  $u, U$  – вектора перемещений твердой и жидкой фаз;  $\varepsilon$  – тензор малых упругих деформаций твердой фазы;  $e$  – объемная деформация жидкой фазы;  $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}$  – тензоры условных напряжений в твердой и жидкой фазах;  $C$  – тензор четвертого ранга эффективных упругих модулей твердой фазы;  $Q$  – тензор коэффициентов, определяющих взаимное влияние деформаций одной из фаз на возникающие напряжения в другой фазе;  $E$  – единичный тензор второго ранга;  $R$  – гидростатическая константа, которую можно интерпретировать как эффективный модуль объемного сжатия жидкой фазы.

Уравнения (1), (2) связывают между собой эффективные напряжения в твердом каркасе и жидкости с деформациями твердой и жидкой фаз с помощью эффективных модулей. В соответствии с механическим смыслом объемной упругой деформации, объемная деформация жидкой фазы равна изменению объема жидкости в порах по отношению к первоначальному объему, т.е. характеризует изменение доли жидкости в представительном элементарном объеме гетерогенного материала. Давление в порах определяется условным гидростатическим давлением, возникающим в жидкой фазе:

$$-\varphi p = \sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2)} + \sigma_{33}^{(2)}, \quad (3)$$

где  $p$  – давление в порах;  $\varphi$  – пористость.

Вывод уравнений динамики пороупругого эффективного континуума при использовании смешанной  $u$ - $p$  формулировки приводит к следующим определяющим соотношениям пороупругого континуума:

$$\sigma(u, p) = C_d \cdot \varepsilon(u) - Ap \equiv \sigma_e(u) - Ap; \quad (4)$$

$$\zeta(u, p) = A \cdot \varepsilon(u) + \varphi^2 R^{-1} p, \quad (5)$$

где  $\sigma_e(u) = C_d \cdot \varepsilon(u)$  – тензор напряжений в точках твердой фазы, вызываемый только деформациями упругой матрицы материала;  $C_d$  – тензор четвертого ранга упругих модулей эффективной пороупругой среды в дренированном состоянии;  $A$  – тензор Био, учитывающий вклад напряжений жидкой фазы в выражение полного тензора напряжений двухфазной среды;  $\zeta$  – скалярная переменная, численно равная отношению изменению содержания жидкости в порах.

Тензор коэффициентов эффективных напряжений Био  $A$  и тензор упругих модулей среды в дренированном состоянии  $C_d$  выражаются через исходные материальные константы двухфазной среды  $C, Q$  и  $R$ :

$$A = \varphi \left( E + \frac{Q}{R} \right); \quad (6)$$

$$C_d = C - R^{-1} Q Q. \quad (7)$$

Рассмотренная математическая модель биологических структур как пористого упругого материала, насыщенного жидкостью, и численный алгоритм реализованы в авторском конечно-элементном комплексе [5]. Система конечно-элементных уравнений, описывающих установившиеся гармонические колебания эффективной среды на основе определяющих уравнений пороупругого тела (4) и (5), имеет следующий вид:

$$(K - \omega^2 (M - i\omega L))U - (H_1 + i\omega H_2)P = F; \quad (8)$$

$$-(H_1 + i\omega H_2)^T U + (-D + i\omega^{-1}G)P = 0, \quad (9)$$

где  $M, K$  – стандартные глобальные матрицы массы и жесткости;  $L$  – дополнительная глобальная матрица массы;  $H_1, H_2$  – глобальные матрицы взаимного влияния распределения давления жидкости в порах и деформации упругого скелетона;  $D$  и  $G$  – глобальные матрицы насыщения и проницаемости;  $U, P$  – глобальные векторы комплексных амплитудных значений перемещений и давлений в узлах конечно-элементной сетки;  $F$  – глобальный узловый вектор объемных и поверхностных сил.

Рассмотренная модель пороупругой среды была использована для расчета вынужденных колебаний и давления в порах изолированного образца большеберцовой кости голени человека под действием поперечной силы, изменяющейся по гармоническому закону с частотой  $\omega$ . Конечно-элементная модель большеберцовой кости среднестатистического человека была разработана на основе фотографических снимков поперечных срезов, представленных в компьютерной базе данных проекта Visible Human Национального Института Здоровья США [6]. Значения материальных констант тканей, полученные расчетным путем согласно разработанному алгоритму вычисления эффективных модулей композитных материалов [7], представлены в таблице.

**Эффективные упругие и гидравлические модули пороупругой среды**

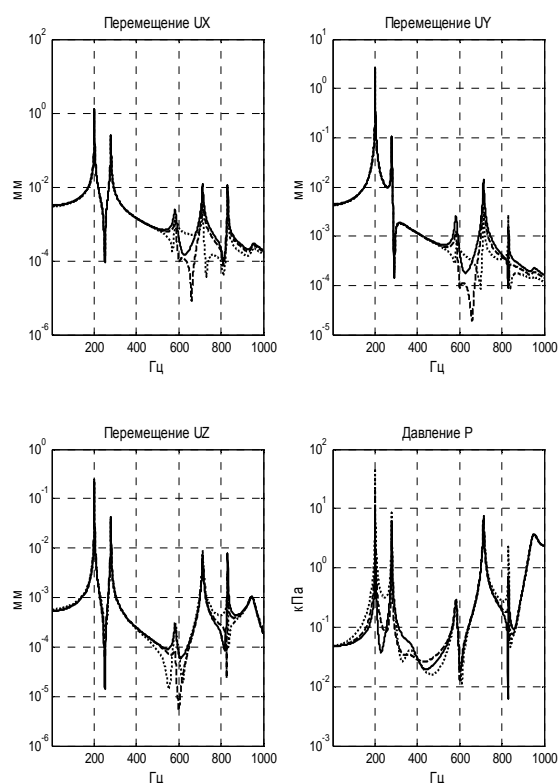
Структурный элемент кости	Пористость	Эффективные характеристики пороупругой среды									
		Плотность	Модули упругости среды в дренированном состоянии						Тензор Био		Гидростатическая константа
			E11=E22	E33	G13=G23	G12	v13=v23	v12	A11=A22	A33	
%	кг/м <sup>3</sup>	МПа	МПа	МПа	МПа					МПа	
Компактная кость	10	1469	11200	21100	6190	4050	0,224	0,331	0,567	0,494	169
Губчатая кость	80	1104	434	1510	333	175	0,104	0,241	0,984	0,961	1790
Костный мозг	96	1021	26,7	26,7	11,1	11,1	0,202	0,202	0,999	0,999	2200

Граничные условия, наложенные на перемещения упругого скелетона, моделируют одноосное шарнирное соединение большеберцовой кости в коленном и голеностопном суставах. В соответствии с этим, закреплены средние точки на торцевых поверхностях диафизарных отделов большеберцовой кости таким образом, чтобы позволять ей совершать вращательные движения в сагиттальной плоскости. Внешняя гармоническая сила ( $F_x = F_y = 1$  Н) лежит в плоскости (XY) перпендикулярно продольной оси голени Z, задана в узле на внешней кромке большеберцовой кости и изменяется в частотном диапазоне от 0 до 1 кГц. Принято также, что внешняя поверхность кости представляет собой непроницаемую стенку, что означает отсутствие заданных потоков жидкости через поверхность.

В результате численного анализа определены основные изгибные формы колебаний большеберцовой кости в сагиттальной (YZ) и фронтальной (XZ) плоскостях. Резонансные частоты, соответствующие изгибным модам, равны 201 и 279 Гц для первой моды в плоскости (YZ) и (XZ) и 713 и 831 Гц – для второй моды. Кроме того, в исследуемый диапазон попали две смешанные формы колебаний на частотах 582 и 956 Гц. Резонансной частоте 582 Гц соответствует изгиб с кручением относительно продольной оси, а частоте 956 Гц – изгиб с продольной деформацией. На рисунке приведены графики резонансных кривых для трех точек, характеризующих компактную и губчатую костные ткани, а также костный мозг в среднем сечении кости.

Интересно отметить, что первые формы колебаний кости имеют большие амплитуды колебаний в поперечной плоскости, что может быть использовано при разработке методов резонансной вибрационной диагностики повреждений опорно-двигательного аппарата человека, так как это облегчает процесс измерения колебаний. Однако для детальной разработки алгоритма диагностики необходимо также рассмотреть чувствительность резонансных частот к механобиологическому состоянию кости в зоне перелома. С другой стороны, а именно, с точки зрения вопроса восстановления костной ткани в зоне перелома, более важным представляется характер распределения давления жидкости в порах в компактной костной ткани. Это связано с тем, что именно благодаря движению внутритканевой жидкости обеспечивается как доставка питательных веществ и строительных микроэлементов клеткам, так и регуляция работы всей механочувствительной системы костных тканей. Графики амплитудно-частотных характеристик и зависимости давления от частоты показывают, что в случае второй изгибной формы в сагиттальной плоскости и изгибно-продольной формы давление в ткани достигает существенных значений при существенно меньших перемещениях упругого скелетона. Кроме того, распределение давления в потенциальной зоне перелома становится неоднородным, что характеризует увеличе-

ние вибрационных потоков жидкости как в продольном, так и в поперечном направлениях, что гипотетически должно интенсифицировать процесс остеосинтеза после повреждения. Отметим также, что старшие, и особенно продольные, формы колебаний не только повышают «коэффициент полезного действия» вибрационной стимуляции, но также снижают возможные болевые ощущения, которые могли бы быть вызваны поперечными смещениями значительной амплитуды. Наконец, еще одно преимущество отмеченных форм колебаний с технической точки зрения состоит в том, что добротность соответствующих парциальных колебательных контуров заметно меньше остальных. Это означает, что неизбежное несовпадение расчетной и реальной собственных частот, на которых планируется проводить вибрационную стимуляцию, не должно оказывать существенного влияния на эффективность процедуры.



Амплитудно-частотные характеристики модели большеберцовой кости, рассчитанные с помощью авторского программного комплекса в трех узлах среднего поперечного сечения вдоль оси Y, относящихся к различным видам тканей: — — АЧХ в точке компактного вещества; - - - - АЧХ в точке губчатого вещества; ..... — АЧХ в точке костного мозга, заполняющего внутренний канал

Полученные результаты имеют ясный физический смысл и позволяют использовать разработанный подход для расчета сложных биомеханических систем, насыщенных жид-

костью, таких как длинные трубчатые кости опорно-двигательного аппарата, связки, хрящи, сухожилия и скелетные мышцы, для математического описания которых аппарат теории двухфазных сред представляется наиболее естественным. Идентификация механического аспекта, ответственного за запуск процесса остеосинтеза, может дать теоретическую базу для разработки биомеханических методов и устройств для лечения остеопороза, интенсификации процесса восстановления кости после перелома, стимуляции вставления костной ткани в материал имплантата.

#### Список литературы

1. **Biot M.A.** General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. – 1941. – Vol. 12. – No. 2. – P. 155–164.
2. **Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, part I: low frequency range // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – Vol. 28. – No. 2. – P. 168–178.
3. **Лурье А.И.** Теория упругости. – М.: Наука, 1970.
4. **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987.
5. **Маслов Л.Б.** Применение теории Бийо к исследованию вынужденных колебаний пористых структур // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Том 11. – № 2. – С. 276–297.
6. **Маслов Л.Б.** Разработка реалистичных моделей упругих элементов опорно-двигательного аппарата человека // Вестник ИГЭУ. – 2008. – Вып. 3. – С. 31–35.
7. **Арсеньев Д.Г., Зинковский А.В., Маслов Л.Б.** Эффективные упругие характеристики анизотропной модели пористого биологического материала, насыщенного жидкостью // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного технического университета. – 2008. – № 3 (59). – С. 230–236.

Маслов Леонид Борисович,  
Ивановский государственный энергетический университет,  
кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики,  
e-mail: tipm@tipm.ispu.ru